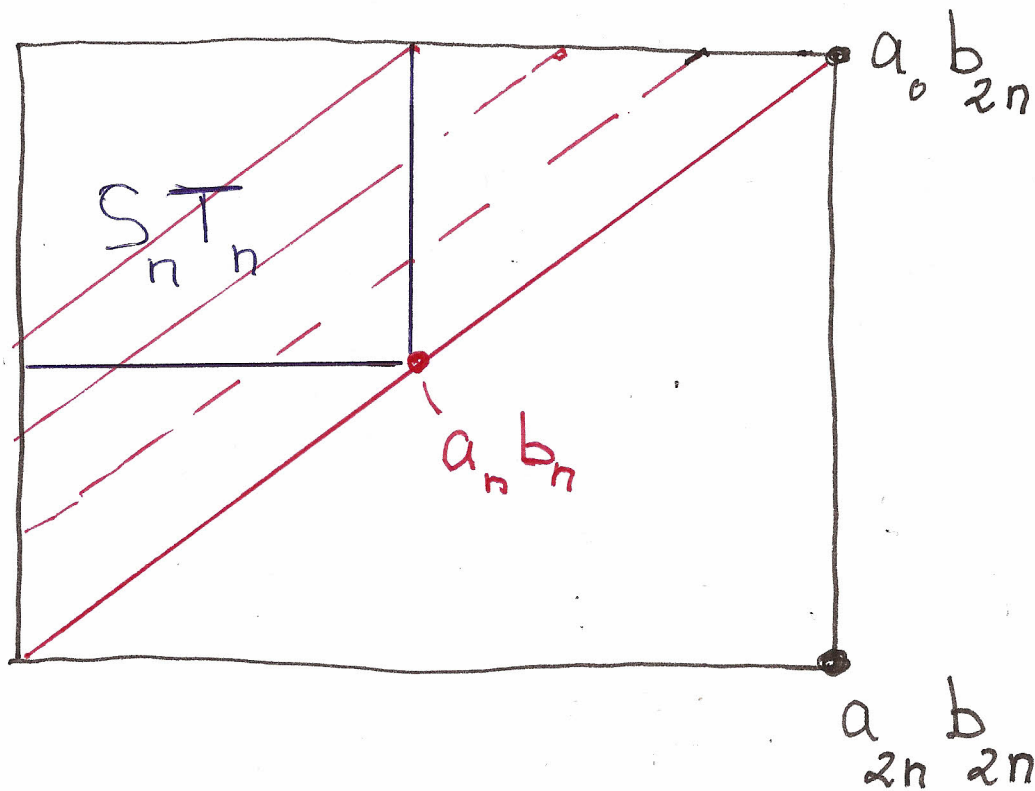




U_{2n} = Summe über die Diagonalen;

diese umfassen das Quadrat für $S_n T_n$

$$\Rightarrow (2) \quad S_n T_n \leq U_{2n}$$

nach (1): U_n nach oben beschränkt

$\Rightarrow$ Konvergenz;

mit (2) und Einschließungssatz folgt die Beh.

Fall 2: $b_k \geq 0$, a_k beliebig

-221-

beachte $a_k = a_k^+ - a_k^-$,

$$a_k^+ := \frac{1}{2} (a_k + |a_k|) \quad \text{Positivteil}$$

$$a_k^- := \frac{1}{2} (|a_k| - a_k) \quad \text{Negativteil } (\neq 0!)$$

$$\text{Fall 1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k^{\pm} b_{n-k} \right);$$

subtrahiere

~~die~~ die Formeln $\Rightarrow$ Beh.

Fall 3: $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

zerlege $b_k = b_k^+ - b_k^-$ und

benutze Fall 2.



Bem: 1.) Im $\mathbb{R}$ -Fall reicht

absolute Konvergenz von nur einer Reihe.

2.) Konvergiert keine Reihe absolut, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Kriterien für absolute Konvergenz

Offensichtlich gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \stackrel{\text{Def}}{\iff}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \iff$$

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \text{ beschränkt unabhängig von } n$$

Das ergibt:

Satz 7.10 (Majoranten / Minorantenkriterium)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent,

$|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle $n \implies$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

b) $b_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$,

$b_n \leq |a_n|$ für fast allen

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent



Finde also „die“ passende Majorante /
Minorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$:

Fall 1 :

$\exists q \in (0,1)$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

ab einem Index n_0

dann : $|a_n| \leq q^n \quad \forall n \geq n_0$;

Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ + Majorantenkriter.

aus Satz 7.10 $\implies$

absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Achtung : aus " $q = 1$ " bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$
folgt i. a. " nichts " ∇

(im Sinne von " keine allgemeine Aussage
möglich "

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent mit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1, \quad q = 1$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergent mit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} < 1, \quad q = 1$$

Fall 2 : $\exists t \in (0, 1)$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq t \text{ ab einem } n_0$$

(hier: alle $a_k \neq 0$ o.E., sonst
lässt man diese weg!)

dann : (o.E. $n_0 = 0$)

$$|a_{n+1}| \leq t |a_n| \leq t^2 |a_{n-1}| \leq$$

$$\dots \leq \pm^{n+1} |a_0| \implies$$

$$|a_k| \leq |a_0| \pm^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0;$$

Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \pm^k$ ($0 < \pm < 1$)

+ Majorantenkriterium $\implies$

absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Für $\pm = 1$ bzw. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

ist keine allgemeine Aussage möglich!

Satz 7.11 : (Wurzelkriterium)

$\implies$:

Sei

$$a := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

i) $a < 1 \implies$ absolute Konvergenz
von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

ii) $a > 1 \implies$ Divergenz

adii): $a > 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|} \gg 1$ für
 ∞ viele $n \implies \{a_n\}$ keine Nullfolge

Satz 7.12 : (Quotientenkriterium)

Sei $a_n \neq 0$ für fast alle n .

Man setzt

$$b := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

i) $b < 1 \implies$ absolute Konvergenz

ii) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \gg 1$ für fast alle n

$\implies$ Divergenz

ad ii): (a_n) ist dann keine
Nullfolge!

-228-

entsprechend ergibt die Forderung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

die Divergenz

(da dann ii)
erfüllt ist
"=1" reicht nicht!)

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kann man nicht

mit dem Quotientenkriterium diskutieren,

da

$$1 > \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$$

aber mit dem nächsten Satz (wähle
dort ϵ passend)

Zusammenfassung: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, (A_k) Folge in $\mathbb{I}$
(vgl. Satz 7.11 + 12)

• $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A_k|} < 1 \implies \underline{\text{absolute Konvergenz}}$

• $\beta := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_{k+1}|}{|A_k|} < 1 \implies -||-$

Wegen $\boxed{\alpha \leq \beta}$ leistet das 1. - Kriterium
mehr, das Quot.-Krit. ist praktischer.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = \frac{3}{2}$

- $\alpha > 1 \implies \text{Divergenz}$
- $\gamma := \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| > 1 \implies \text{Divergenz}$

(im Beispiel ist $\gamma = \frac{1}{6}$)

- Fälle $\alpha = 1, \gamma = 1$:

Keine allgemeine Aussage möglich !

-229-

Satz 7.13 (Verschärfung von Satz 7.12)

Mit $c > 1$ gelte $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq 1 - \frac{c}{n}$

für fast alle n . Dann konvergiert
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis: Blatt 7, A1

Schlussbemerkung: Es gilt stets

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

man hat also mehr Chancen beim $\sqrt[n]{}$ -
Kriterium. (vgl. Barnik - Flohr, p. 161)

Anwendung der Theorie der
absoluten Konvergenz auf

Potenzreihen (Funktionen)

(unendliche
Polynome)

(z.B. $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z \in \mathbb{C}$)

Gegebene Daten:

$z_0 \in \mathbb{C}$ „Entwicklungsmitte“

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

Koeffizientenfolge aus $\mathbb{C}$

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergent? M. a. W.: Wo ist die

Potenzreihenfunktion

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

wohldefiniert?

Hilfssatz: i) Konvergenz immer in
der Entwicklungsmitte $z = z_0$.

ii) Findet man eine komplexe Zahl $z_1 \neq z_0$,
so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ konvergiert



(nicht notwendig absolut!), so hat man

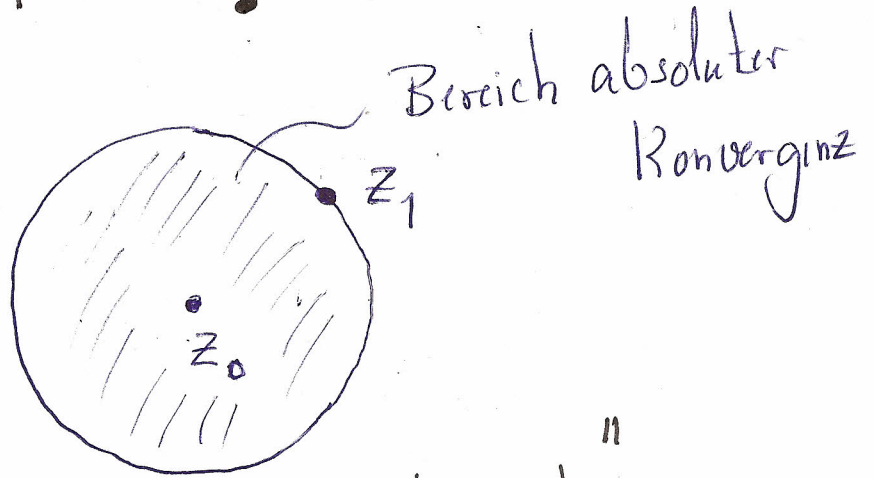
absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit
 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Bem: 1) ii) besagt, dass absolute Konvergenz ^{zumindest}
auf der Kreisscheibe um z_0 mit Radius
 $|z_1 - z_0|$ vorliegt;

2) sind alle Daten reell, also
 $a_k, z_0, z_1 \in \mathbb{R}$,

so liefert ii) speziell die Konvergenz (absolut) für $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$ mit $r := |z_1 - z_0|$; natürlich hat man aber auch absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r$!

(benutzt nur Maj.-Krit. via geom. Reihe $\nabla \nabla$)



✓
Beweis: i) $z = z_0 \longrightarrow$ "Reihencwert" = a_0

ii) oft benutzter "Trick" zur schreib-technischen Vereinfachung:

$O. E. \quad z_0 = 0$

falls nicht: ersetze nachfolgend die

$$\begin{cases} \text{Variable } z \text{ durch } w = z - z_0 \\ \text{und } z_1 \text{ durch } w_1 = z_1 - z_0 ; \end{cases}$$

Aus der Vor. " $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ konvergiert "

folgt: $(a_k z_1^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ Nullfolge

(mehr benutzen wir nicht !!) $\Rightarrow$

$$\exists N : \left\{ |a_k| \cdot |z_1|^k \leq 1 \text{ für alle } k \geq N \right\} \quad (\otimes)$$

(auch hier wird nur wenig investiert !!)

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|z| < |z_1|$.

Für $k \geq N$ folgt:

$$|a_k z^k| = |a_k| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^k |z_1|^k$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \left| \frac{z}{z_1} \right|^k$$

Da $\sum_{l=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_1} \right|^l < \infty$ gilt, folgt die Beh. nach dem Majorantenkriterium. $\square$

Satz 7.14 : Für die (formale) Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ definiert man den

Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$,

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ konvergiert} \right\}$$

Dann gilt :

(i) absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$

(ii) Divergenz für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

Bem: 1.) drei Fälle sind möglich:

$R = 0$: Konvergenz nur in $z = z_0$

(z.B.: $\sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k$)

$R = \infty$: Konvergenz auf ganze $\mathbb{C}$!

$0 < R < \infty$: absolute Konvergenz
auf der Kreisscheibe $|z - z_0| < R$;
Divergenz für $|z - z_0| > R$.

Konvergenz von Potenzreihen ereignet
sich also stets auf Kreisscheiben

mit Radius R , wobei die Grenzfälle
 $R \in \{0, \infty\}$ zulässig sind.

2.) alle Daten $\in \mathbb{R}$ $\implies$ insbesondere
 Konvergenz auf $(z_0 - R, z_0 + R)$
 sowie Divergenz für $z \in \underline{\mathbb{R}}$ mit
 $|z_0 - z| > R$

3.) für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$
 (Rand des Konvergenzkreises) ist keine
 allgemeine Aussage möglich:

es ist $R = 1$ (wieso?) und

$z_0 = 0$ für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n : \text{Konvergenz in } -1, \text{ Divergenz in } 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n : \text{Divergenz für alle } |z| = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n : \text{Konvergenz für alle } |z| = 1$$

4.) anschließend: Formeln für $\mathbb{R}$

Beweis von Satz 7.14:

i) o. E. $\boxed{R > 0}$, sonst ist nichts zu zeigen;

wie vorhin: o. E. $\boxed{X_0 = 0}$

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\boxed{|z| =: r < R.}$

nach Def. von R findet man

$$\pm \in (\tau, R),$$